واریانس جملات دنبالهٔ حسابی

اشاره

با توجه به فرمول پیچیدهٔ واریانس (انحراف معیار) که استفاده از آن برای داده‌های زیاد، مثلاً n داده، وقت‌گیر و طاقت‌فرساست، اگر حالت خاصی از داده‌ها که از نظم خاصی پیروی کنند (تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند) را در نظر بگیریم، یک فرمول ساده و جالب برای به‌دست آوردن واریانس وجود دارد که به اثبات آن می‌پردازیم.

مسلم نادری
دبیر ریاضی آموزش‌وپرورش استان کرمانشاه منطقه ثلاث باباجانی

هرگاه n دادهٔ آماری داشته باشیم، به‌طوری که این داده‌ها تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d دهند، میانگین و انحراف معیار آن با استفاده از فرمول‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_n}{2} \quad , \quad \sigma=d\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

اثبات: n دادهٔ زیر که تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d می‌دهند را در نظر می‌گیریم:

$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots, a+(n-1)d$

ابتدا مجموع این داده‌ها را با استفاده از دستور محاسبهٔ مجموع جملات دنبالهٔ حسابی، به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$S_n=\frac{n}{2}(a+a_n)=\frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$$

$$\bar{x}=\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}=\frac{n(a+a_n)}{2n}=\frac{(a+a_n)}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{x}=\frac{(a+a_n)}{2}$$

$$\bar{x}=\frac{(2a+(n-1)d)}{2}=a+\frac{(n-1)}{2}d \quad (1)$$

می‌دانیم فرمول واریانس که در کتاب درسی آمار و مدل‌سازی آمده به‌صورت زیر است و با جاگذاری (۱) به‌جای میانگین داریم:

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-(a+\frac{(n-1)d}{2}))^2$$

با توجه به فرمول $x_k=a+(k-1)d$ داریم:

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a+(k-1)d-(a+\frac{(n-1)d}{2}))^2$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}((k-1)d-\frac{(n-1)d}{2})^2$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}d^2((k-1)-\frac{(n-1)}{2})^2=\frac{d^2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(k-\frac{(n-1)}{2})^2$$

$$=\frac{d^2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}[k^2-2k\frac{(n-1)}{2}+(\frac{n-1}{2})^2]$$

$$=\frac{d^2}{n}[\sum_{k=0}^{n-1}k^2-(n-1)\sum_{k=0}^{n-1}k+n\frac{(n-1)^2}{4}]$$

می‌دانیم مجموع مجذورات n عدد طبیعی متوالی برابر است با:

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

و مجموع n عدد طبیعی متوالی برابر است با: $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$. بنابراین:

$$=\frac{d^2}{n}[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}-(n-1)(\frac{(n-1)n}{2})+\frac{n(n-1)^2}{4}]$$

$$=d^2[\frac{(n-1)(2n-1)}{6}-\frac{(n-1)^2}{2}+\frac{(n-1)^2}{4}]$$

$$=d^2(n-1)[\frac{4n-2-6n+6+3n-3}{12}]=d^2(n-1)\frac{(n+1)}{12}$$

$$=\frac{d^2(n^2-1)}{12}\Rightarrow\sigma^2=\frac{d^2(n^2-1)}{12}$$

$$\Rightarrow\sigma=d\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

مثال: میانگین و واریانس داده‌های آماری زیر را به‌دست آورید:

۲,۵,۸, ..., ۸۹

حل: داده‌های فوق جملات دنبالهٔ $a_n=3n-1$ و $n\leq 30$ هستند. بنابراین به کمک دستور فوق داریم:

$\bar{x}=\frac{x_1+x_n}{2}=\frac{2+89}{2}=$ ۴۵/۵

$$\sigma=d\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}=3\sqrt{\frac{899}{12}}$$